

# Πρώτο Τεστ (Συμπληρωματικό) Μιγαδικές Συναρτήσεις I

Διάρκεια 75 Λεπτά

**Στοιχειοθεσία:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

## Θέμα 1

Να λυθεί η εξίσωση:

$$3z^5 + 24z^2 = 0.$$

Υπάρχουν πραγματικές ρίζες; Ποιες είναι αυτές;

## Θέμα 2

Να βρεθεί το σύνολο των σημείων  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία

$$\operatorname{Re}(z^2 - 5z + 10) < 0 \text{ και } \operatorname{Im}(z^2 - 5z + 10) = 0.$$

Δώστε τη γεωμετρική αναπαράσταση του ζητούμενου συνόλου.

## Θέμα 3

Να αποδειχθεί ότι

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1012} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## Θέμα 4

Να εξετασθεί αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι Αληθείς ή Ψευδείς (με πλήρη αιτιολόγηση).

(i) Το σύνολο των  $z \in \mathbb{C}$  για τα οποία ισχύει  $z + \bar{z} = -2$  είναι ευθεία.

(ii) Για κάθε  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ισχύει:  $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$

(iii)  $\operatorname{Arg}(\sqrt[5]{1-i}) = -\frac{\pi}{20}$

(iv) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $\log(e^z) = z$

(v) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $(\sqrt[n]{z})^n = z$

## Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο  $f(z) = \frac{i - iz}{1 + z}$ ,  $z \neq -1$  και το σύνολο

$$A := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Να βρεθεί η εικόνα του  $A$  μέσω της  $f$  (δηλαδή, το  $f(A)$ ).

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!